

# Princípios da balança de Kibble

Haroldo Kennedy Clebicar Nogueira<sup>1</sup>

Antônio Henricus Maria de Knecht<sup>2</sup>

## RESUMO

Para se fazer a certificação de um medidor de energia elétrica, é preciso ter um padrão de referência dentro de especificações precisas, acessíveis e conhecidas. O padrão de referência usado anteriormente a 2018 era uma massa de platina-irídio. Atualmente, essa referência é um múltiplo da constante de Plank, conseguido pelo uso de uma Balança de Kibble. O primeiro passo para se construir a balança é encontrar a constante (com uma aproximação analítica) de linearização da bobina que gera a força magnética da balança. A corrente elétrica fluindo por uma bobina gera uma força magnética que manterá uma pequena massa de teste em equilíbrio com uma massa a ser medida. Por outro lado, para o cálculo a massa, essa constante de aproximação deverá ser eliminada. Para isso serão feitas duas medições em dois modos diferentes da balança. Uma medição de corrente (A) no “modo peso” ou “modo equilíbrio”. A segunda medida, de tensão (V), no “modo velocidade” ou “modo calibração”, nesta última, sem a massa de teste. A constante é comum tanto nas medições e quanto das equações. Igualam-se as duas equações a essa constante, assim esta constante é eliminada. Sabendo-se valor da gravidade, velocidade, o valor da massa pode ser calculado sem aquela imprecisão analítica da constante. O protótipo construído e instalado no Laboratório de Eletromagnetismo do IPUC encontra-se acessível à comunidade acadêmica e mostrou-se relevante também na realização de experimentos em sala de aula da Educação Básica (Ensino Médio), que funcionou como piloto para verificação da potencialidade das descobertas aqui evidenciadas.

**Palavras-chave:** Energia. Medidores. Metrologia. Watt. Aferição. Balança; Kibble. Faraday. Ensino Médio.

# Principles of the Kibble Balance

## ABSTRACT

In order to calibrate an electricity meter, it is mandatory to get a reference standard within known, accurate and accessible specifications. The reference standard used before 2018 was a platinum-iridium mass. Currently this reference is a multiple of the Planck constant, achieved by using a Kibble balance. The first step in building the balance is to find the constant (with an analytical approximation) of linearization of the coil that generates the magnetic force of the balance. The electric current flowing through a coil generates a magnetic force that will keep a small reference mass in equilibrium with a mass to be measured. On the other hand, to calculate the mass, due to the analytical imprecision of this constant, it must be eliminated. For this purpose, two measurements will be made in two different modes of the balance. A current (A) measurement in “weight mode” or “balance mode”. The second measurement, of voltage (V), in “speed mode” or “calibration mode”, in the latter, without the reference mass. The constant is common in both measurements and equations. The two equations are equal to this constant, so this constant is eliminated. Knowing the value of gravity, speed, the value of mass can be calculated without that analytical inaccuracy of the constant. The prototype was built and installed at the Electromagnetism Laboratory of IPUC; it is available to the academic community and it proved to be relevant also in carrying out experiments in the Basic Education (High School) classroom, which worked as a pilot to verify the potential of the discoveries highlighted here.

**Keywords:** Energy. Meters. Metrology. Watt. Gauging. Balance. Kibble. Faraday. High School.

---

<sup>1</sup> Aluno de graduação em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. E-mail: hkclebicar@yahoo.com.

<sup>2</sup> Professor do Curso de Engenharia de Controle de Sistemas Dinâmicos pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. E-mail: ahmknecht@hotmail.com.

## 1 INTRODUÇÃO

A metrologia é a ciência que estuda e descreve pesos e medidas. Dentre as medidas mais empregadas na vida cotidiana, está a massa. A definição de massa, que utilizava um objeto físico, perdurou por assim dizer 130 anos, de 1889 até 20 de maio de 2019 (NATIONAL PHYSICAL LABORATORY, 2019). A definição mais recente da massa agora é baseada em um múltiplo da constante de Planck. Para se obtê-la, deve ser usada a balança de Kibble. O uso dessa balança substituiu, a partir daquela data, o Protótipo Internacional de Quilograma (cilindro de platina-irídio) que está localizado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), em Sèvres, França. Essa balança leva o nome do físico e metrologista que a idealizou, Bryam Kibble (NIST, 2019), e também é conhecida como balança de Watt, sobrenome de um dos primeiros cientistas a criar instrumentos de medições, James Watt.

As instituições de metrologia dos países signatários do Sistema Internacional (SI) de unidades deverão estar sujeitas a normas de órgãos internacionais que estabelecem mecanismos legais para serem seguidos. Um deles exige manterem-se as cópias dos cilindros de platina-irídio calibrados em relação ao Protótipo Internacional de Quilograma e aferidos de tempos em tempos. Para alguns países membros, isso ainda é feito, mas a um custo logístico e financeiro muito alto, principalmente os países fora da Europa.

A balança de Kibble foi escolhida a partir de questionamentos sobre o que se poderia fazer objetivamente com a lei de Faraday-Neumann-Lenz, quando esta gera uma tensão induzida num circuito elétrico, e o uso desse efeito para medir uma massa qualquer.

A balança utiliza o múltiplo da constante de Planck para fazer duas medições distintas, corrente e tensão nesta escala de grandeza, e utilizando dois modos de medição: peso e velocidade. O efeito macro em ambas as situações vem da lei de Faraday. De posse dessas duas medições, e sabendo-se o valor da aceleração da gravidade, chega-se ao valor da massa medida. Assim quanto à delimitação, este protótipo a ser modelado e construído deve ser encarado como um modelo para o entendimento simplificado da balança de um laboratório de aferição.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS

### 2.1 A nova definição do quilograma

A partir de 20 de maio de 2019, o quilograma passou a ser definido como se tomando o valor numérico fixo da constante de Planck,  $h$ , como sendo  $6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$  quando expresso

na unidade  $J \cdot s$ , que é igual a  $kg \ m^2 \ s^{-1}$ , em que o metro e o segundo são definidos em termos da velocidade da luz,  $c$ , e da frequência de transição hiperfina do césio-133,  $\Delta\nu$ , respectivamente (NIST, 2019).  $c = 299.792.458 \ m/s$  (TIPLER; MOSCA, 2015).

## 2.2 A lei de Faraday-Neumann-Lenz

Quando um fluxo magnético através de uma superfície varia, o campo magnético devido a qualquer corrente induzida produz um fluxo próprio – através da mesma superfície e de sinal oposto à variação do fluxo (TIPLER; MOSCA, 2015, p. 267).

$$E = \frac{-\Delta\Phi_B}{\Delta t} \quad (1)$$

Onde  $\Phi_B$  é o fluxo, definido como:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2)$$

A superfície  $\vec{s}$  é qualquer superfície cuja borda seja o circuito que está recebendo a tensão induzida. Usando a definição de força eletromotriz (FEM), e tornando  $\Delta t$  infinitesimal temos:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-\Delta\Phi_B}{\Delta t} \quad (3)$$

Se um condutor retilíneo, de comprimento  $L$ , estiver num campo magnético uniforme, numa velocidade constante e uniforme  $v$ , terá entre suas extremidades uma diferença de potencial  $V$  (Volts) (TIPLER; MOSCA, 2015, p. 289).

$$V = -L \frac{di}{dt} = v \cdot \vec{B} \cdot L \quad (4)$$

Sendo  $\vec{E}$  o campo elétrico induzido numa superfície fechada,  $d\vec{l}$  é um elemento infinitesimal do circuito e  $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$  é a variação do fluxo magnético no tempo, o sinal negativo indica que o sentido é o contrário que lhe deu origem. Esta fórmula está convencionada no SI.

Se fosse usado o sistema CGS, com unidades gaussianas a equação 3 se torna:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5)$$

Sendo  $\nabla \times$  o operador rotacional.

### 2.3 A lei de Coulomb

A força entre duas cargas puntiformes é exercida ao longo da linha entre as cargas. Ela varia com o inverso do quadrado da distância que separa as cargas e é proporcional ao produto das cargas. A força é repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal e atrativa se elas tiverem sinais opostos (TIPLER; MOSCA, 2015, p. 6).

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \quad (6)$$

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ , sendo que K é a constante eletrostática no vácuo  $K_0 = 8,9875 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ , a constante terá valor:  $\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$  (TIPLER; MOSCA, 2015).

$$F = K_1 \frac{q q'}{r^2} \quad (7)$$

### 2.4 A lei de Ampère

Um ampere é a corrente constante que, se mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito, de seção circular desprezível e posicionados a 1 metro no vácuo, produziria entre esses condutores uma força igual a  $2 \times 10^{-7}$  newton por metro de comprimento (MILTON, 2016)<sup>3</sup> (tradução nossa).

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I I'}{r} \quad (8)$$

$$\frac{dF}{dl} = 2 K_2 \frac{I I'}{r} \quad (9)$$

Sendo que a definição da equação da lei de Coulomb por Tipler e Mosca é:

$$\oint_C \vec{B}_t \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \nabla \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C, \text{ onde } C \text{ é qualquer curva fechada.} \quad (10)$$

<sup>3</sup> The ampere is that constant current which, if maintained in two straight parallel conductors of infinite length, of negligible circular cross-section, and placed 1 metre apart in vacuum, would produce between these conductors a force equal a  $2 \times 10^{-7}$  newton per metre of length.

Se fôssemos usar a lei de Ampère no sistema CGS, com unidades gaussianas a equação teríamos:

$$\oint_e(\text{superfície fechada}) = \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}(4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \quad (11)$$

Sendo  $\vec{J}$  a densidade de corrente total (A/m<sup>2</sup>).

## 2.5 Força magnética num condutor retilíneo

Um fio onde existe uma corrente  $i$ , em presença de um campo magnético  $B$ , estará sujeito a uma força cuja direção é perpendicular ao plano que contém o trecho do fio considerado e o campo magnético. O sentido se dará com o uso da regra da mão esquerda. Matematicamente o módulo da força num trecho do fio pode ser calculado por (TIPLER; MOSCA, 2015. pg 194):

$$F = I \cdot \vec{L} \times \vec{B} = I \cdot B \cdot L \cdot \sin \alpha \quad (12)$$

$F$  é a força em Newtons.

$I$  é a corrente em A.

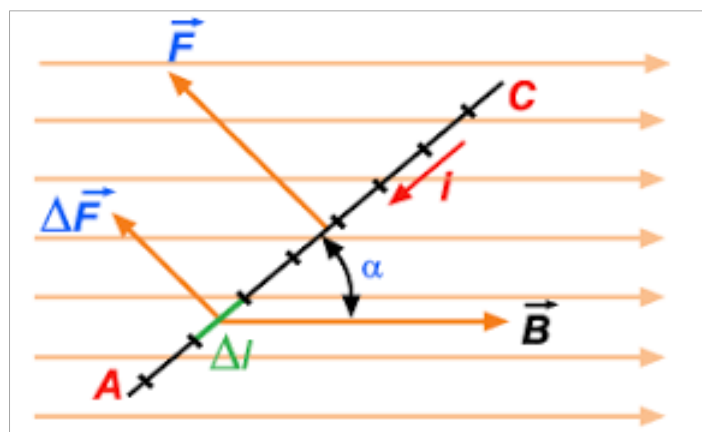
$\vec{B}$  é o vetor campo magnético.

$L$  é o comprimento do fio em metros.

$\vec{L}$  é o vetor cujo módulo é o comprimento do segmento e cuja direção e sentido são os mesmos da corrente ( $\vec{J}$ ).

$\alpha$  = ângulo entre a direção da corrente e o vetor campo elétrico  $\vec{B}$ .

Figura 1 - Planos para  $I \cdot \vec{B} \cdot L \cdot \sin \alpha$



Fonte: CEPA-USP 2020.

## 2.6 Equações de Maxwell para o vácuo

As equações (5) e (6) ligam de forma mecânica as unidades elétricas através de constantes de proporcionalidades que dependem do sistema de unidades escolhido (MILTON, MARTIN, 2016).

$$\oint_e(\text{superfície fechada}) = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (13)$$

$$\oint_m(\text{superfície fechada}) = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (14)$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \nabla \times \vec{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (15)$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} = \nabla \times \vec{B} = \frac{k_m}{k} \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (16)$$

O único parâmetro nessas equações é a constante  $\frac{K_m}{K}$ . No Sistema Internacional (SI) de unidades, o valor dessa constante é (MILTON, MARTIN, 2016).

$$\frac{K_m}{K} = \frac{10^{-7} t \cdot m \cdot A^{-1}}{9 \times 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2}} = \frac{1}{9 \times 10^{16} m^2} \quad (17)$$

$$\frac{K_m}{K} = \frac{1}{c^2} \quad (18)$$

## 2.7 Correntes de Foucault

Corrente de Foucault ou correntes parasitas (são, na maioria dos casos, indesejadas), em inglês são chamadas de *eddy current*. É o nome dado à corrente elétrica induzida de um material condutor, seja ele paramagnético ou diamagnético, quando sujeito a um campo magnético variável (TIPLER; MOSCA, 2015, p. 275), isto devido a lei de Faraday.

A corrente de Foucault flui em uma volta fechada dentro do condutor, em planos perpendiculares, que pode ser induzida em um condutor estacionário próximo a um campo magnético variável no tempo, criado por um ímã em queda, eletroímã ou transformador próximos. (TIPLER; MOSCA, 2015, p. 275).

A variação do fluxo é inversamente proporcional à resistividade do material. Lembrando ainda da lei de Lenz, o sentido do campo será contrário ao que lhe deu origem (TIPLER; MOSCA, 2015, p. 267), o que ocasionará também uma corrente no sentido contrário.

Numa primeira aproximação, para variações temporais dos campos com frequências  $\omega$  relativamente elevadas, vamos considerar o metal como sendo um “condutor perfeito”. Nessas condições, conforme discutido no início, o campo magnético não penetra na placa; ele se torna nulo no interior do metal de forma a só haver um campo magnético tangente à superfície do metal (CATTANI; VANNUCCI, 2014).

A equação para a corrente de Foucault se torna:

$$\vec{J}_c = \sigma E_c = \frac{1}{\delta} H // e^{\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \phi \quad (19)$$

$\vec{J}_c$  = Vetor densidade de corrente elétrica no condutor.

$\sigma_c$  = Condutividade do condutor (condutor perfeito  $\sigma \rightarrow \infty$ ).

$E_c$  = Campo elétrico no condutor.

$z$  = Um dos eixos considerados (o plano está em  $x$  e  $y$ );

$\omega$  = Frequência.

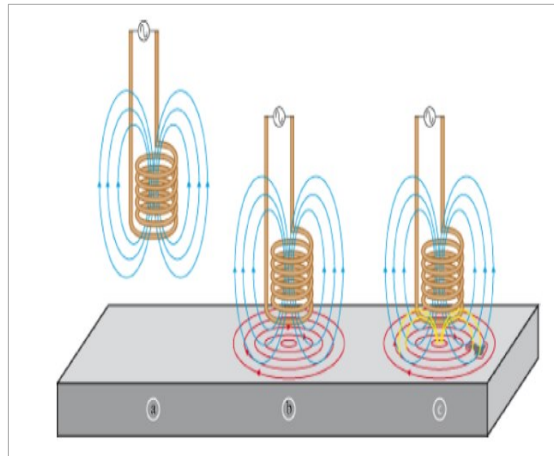
$\delta$  = Profundidade de penetração ou *skindepth* (o condutor perfeito  $\delta \rightarrow 0$ ).

$\phi$  = Versor é tangente as circunferências desenhadas no plano paralelo a superfície do condutor.

$$\delta = \left( \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \right) \quad (20)$$

Assim, as densidades de corrente de Foucault são induzidas no interior do condutor em uma camada metálica de espessura  $\delta$ , e que elas circulam em torno do eixo de simetria do solenoide em circunferências concêntricas com raios  $\rho$ , conforme a figura 2.

**Figura 2 - Geração das correntes de Foucault numa superfície condutora.**



Fonte: CATTANI; VANNUCCI, 2014.

## 2.8 Equação Diferencial para a Massa em Translação

*Segundo Nise (2013, pg 51):*

$$f(t) = m \cdot g = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (21)$$

## 2.9 Linearização do Modelo Físico

A equação da força magnética ( $F_m$ ) numa bobina (BLANCO *et al.*, 1998):

$$F_m = \frac{1}{8} \frac{X_m \mu_0 N^2 i^2}{(L^2 + a^2)} \quad (22)$$

$$X_m = \mu_r = K_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \quad (23)$$

$$F_m = \frac{1}{8} \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \mu_0 N^2 i^2}{(L^2 + a^2)} \quad (24)$$

Sendo que:

$X_m$  = susceptibilidade magnética do núcleo da bobina.



$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot c^2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \text{ (TIPLER, MOSCA, 2015).} \quad (25)$$

$$\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot c^2 = 1 \text{ (TIPLER, MOSCA, 2015).}$$

a = raio da bobina.

L = comprimento da bobina.

Para o modelo, a força magnética ( $F_m$ ), que atua no sistema pode ser considerado uma função quadrática não linear dependente diretamente da corrente e indiretamente da distância com uma constante  $K$ . Esta constante multiplica o quadrado da corrente  $I$  em Ampère e inversamente proporcional ao quadrado da distância  $d$  em metros, que tem como unidade de força resultante em Newtons.

$$F_{m(i, d)} = K \frac{I^2}{d^2} = F_{m(i, d)} = \frac{k_i I^2}{k_x d^2} \quad (26)$$

Será usada uma expansão em série de Taylor (DORF; BISHOP, 2013, p. 40) em torno do ponto de operação ( $x_0$ ) para a equação diferencial acima, para fazermos a aproximação da constante  $K_i$ , a derivada do numerador da nossa equação acima.

**Tabela 1 - Linearização para achar a constante  $K_i$  (N/M).**

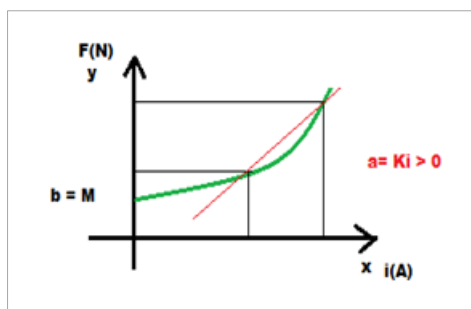
Massa (Kg)	V(V)	Corrente (A)	Força (N)	d (m)
m	V1	Io1	F1	xo1
m	V2	Io2	F2	xo2

Fonte: Elaborada pelos autores.

$$y = + ax + b \Rightarrow F \text{ (N)} = K_i x + b \quad \therefore$$

$$F \text{ (N)} = K_i i + m \quad (27)$$

**Figura 3- Representação da linearização de  $K_i$**



Fonte: Elaborada pelos autores.

Da equação de uma reta  $y_i$  (variação da corrente) tendo os valores conhecidos de  $i_{o1}$ ,  $i_{o2}$  e  $m$  temos que o coeficiente angular da reta formada pela tabela 1 acima nos dará o valor da constante  $K_i$ . A força magnética resultante será diretamente proporcional ao quadrado da variação da corrente multiplicado pela constante  $K_i$ , equação (25). A inclinação do gráfico será o valor de  $K_i$ . O valor será positivo devido à natureza da relação entre a força e o crescimento da corrente  $i$  (A) no eixo “x”.

De maneira idêntica à anterior, encontra-se o valor de  $K_x$ , a derivada do denominador da nossa equação acima usando também a expansão em série de Taylor.

**Tabela 2 - Linearização para achar a constante  $K_x$  (N/M).**

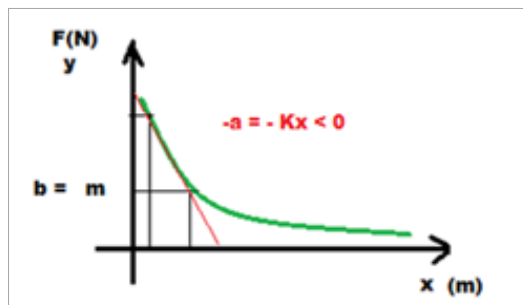
Massa (Kg)	d (m)	Força (N)	Corrente (A)	V(V)
m	$x_{o1}$	F1	$i_{o1}$	V1
m	$x_{o2}$	F2	$i_{o1}$	V2

Fonte: Elaborada pelos autores.

$$y = -ax + b \Rightarrow F(N) = -K_x x + b \therefore$$

$$F(N) = -K_x x + m. \tag{28}$$

**Figura 4 - Representação linearização para encontrar  $K_x$**

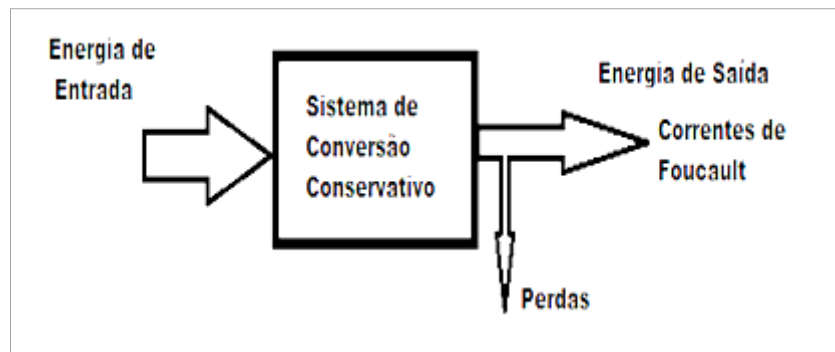


Fonte: Elaborada pelos autores.

Da equação de uma reta que corta o eixo  $y_x$  (variação da posição) nos pontos  $x_{o1}$ ,  $x_{o2}$  e  $m$ , temos que o coeficiente angular da reta formada pela tabela 2 acima nos dará o valor da constante de linearização  $K_x$ . A força magnética resultante é inversamente proporcional ao quadrado da variação da posição, equação (25). A inclinação do gráfico será o valor de  $-K_x$ , valor negativo devido à natureza da relação entre a força e o crescimento da distância  $x(m)$  no eixo de mesmo nome.

## 2.10 Fluxo de Energia: entrada e saída e perdas

Figura 5 - Fluxo de energia: entrada, saída e perdas.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Praticamente toda a energia será convertida em correntes criadas no interior do metal, que chamamos de correntes parasitas (TIPLER;MOSCA, 2015, p. 275) ou correntes de Foucault (*eddy currents*), parte desta energia é convertida em calor (efeito Joule) pela resistência intrínseca do metal onde ela é criada, neste caso, o do cobre. As outras perdas de devem ao efeito magnetocalórico (EMC) (PERLINGEIRO, 1999), que serão desprezadas devido sua ordem de grandeza em relação as forças envolvidas nas correntes de Foulcault.

O diferencial de energia elétrica equação (31), pode ser escrito como uma função da corrente  $i$  e do fluxo enlaçado  $\Phi$  utilizando as expressões para a potência elétrica e a lei de Faraday, equações (29) e (30) respectivamente.

$$\frac{dW_{ele}}{dt} = e i \quad (29)$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (30)$$

$$dW_{ele} = - i \frac{d\Phi}{dt} \quad (31)$$

Dispositivos de conversão eletromagnética possuem um espaçamento entre os materiais ferromagnéticos, denominado *gap* (espaço, distância). A permeabilidade magnética do ar é muito menor que a dos materiais ferromagnéticos (HAYT;BUCK, 2013, p. 377). Devido a isto, pode-se assumir que a relutância (HAYT;BUCK, 2013, p. 256) do sistema é a própria relutância do *gap*.

$$R = \frac{x}{\mu S} \text{ (Ae/Wb)} \quad (32)$$

Esta será a equação para a relutância para um material magnético homogêneo, isotrópico e linear, de comprimento  $x$  e de seção reta uniforme  $S$ , ainda segundo Hayt:

$Ae$  é Ampère espira.

$R$  é a relutância medida por Ampère espira por Weber.

$x$  é o comprimento do *gap*.

$S$  é a seção reta de área do *gap*.

Como o único material mais comum a aplicar esta relação é o ar, então aplica-se  $\mu = \mu_{ar}$ .

Como a distribuição espacial de  $\Phi$  é dependente desta relutância, pode-se dizer que a força é função da dimensão  $x$  do *gap* para o caso unidimensional. Com isso, a diferencial de energia mecânica pode ser definida como (TIPLER; MOSCA, 2015, p. 170):

$$dW_{mec} = f dx \quad (33)$$

Com base nas equações (30) e (31), pode-se escrever a diferencial de energia armazenada no campo magnético:

$$dW_{campo} = i \frac{d\Phi}{dt} - f dx \quad (34)$$

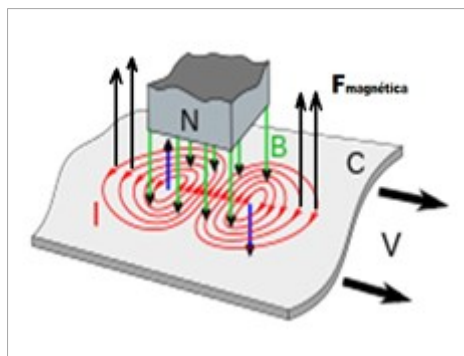
O sistema é conservativo, portanto  $W_{campo}$  é definido pelos valores de estado de  $\Phi$  e  $x$ . Para encontrar equações que permitam o cálculo de  $f$  e  $i$ , compara-se a equação de  $dW_{campo}$  com a diferencial total de uma função de duas variáveis, descrito na equação (35). Desta comparação resultam as equações (36) e (37) a seguir:

$$dW_{campo}(\Phi, x) = \frac{\partial W_{campo}}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial W_{campo}}{\partial x} dx \quad (35)$$

$$\frac{\partial W_{campo}(\Phi, x)}{\partial \Phi} = i \quad (36)$$

$$\frac{\partial W_{campo}(\Phi, x)}{\partial x} = -f \quad (37)$$

Figura 6 - Geração de corrente numa superfície metálica e uma força magnética.

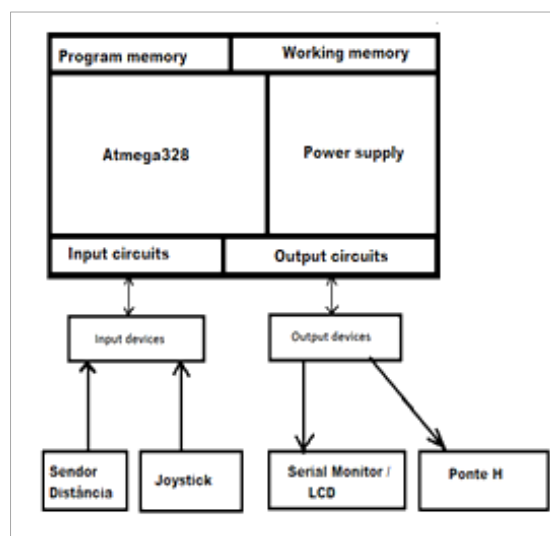


Fonte: Elaborada pelos autores.

Como  $\Phi$  depende da corrente e da posição, verifica-se da equação (35), que o trabalho da força magnética, é uma função da corrente ( $i$ ) e da posição ( $x$ ).

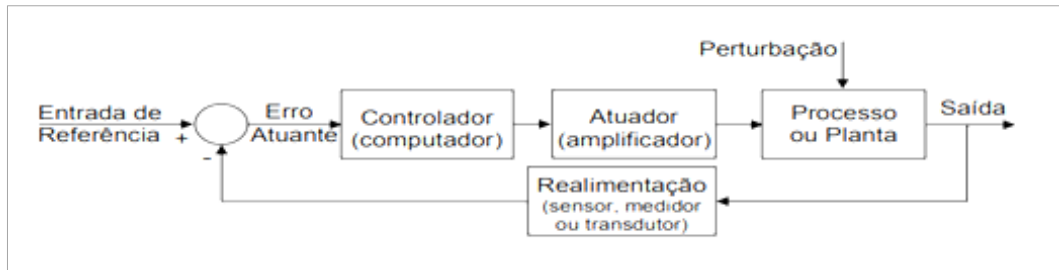
## 2.11 Diagramas do Protótipo

Figura 7 - Diagrama genérico de um sistema de controle com realimentação negativa



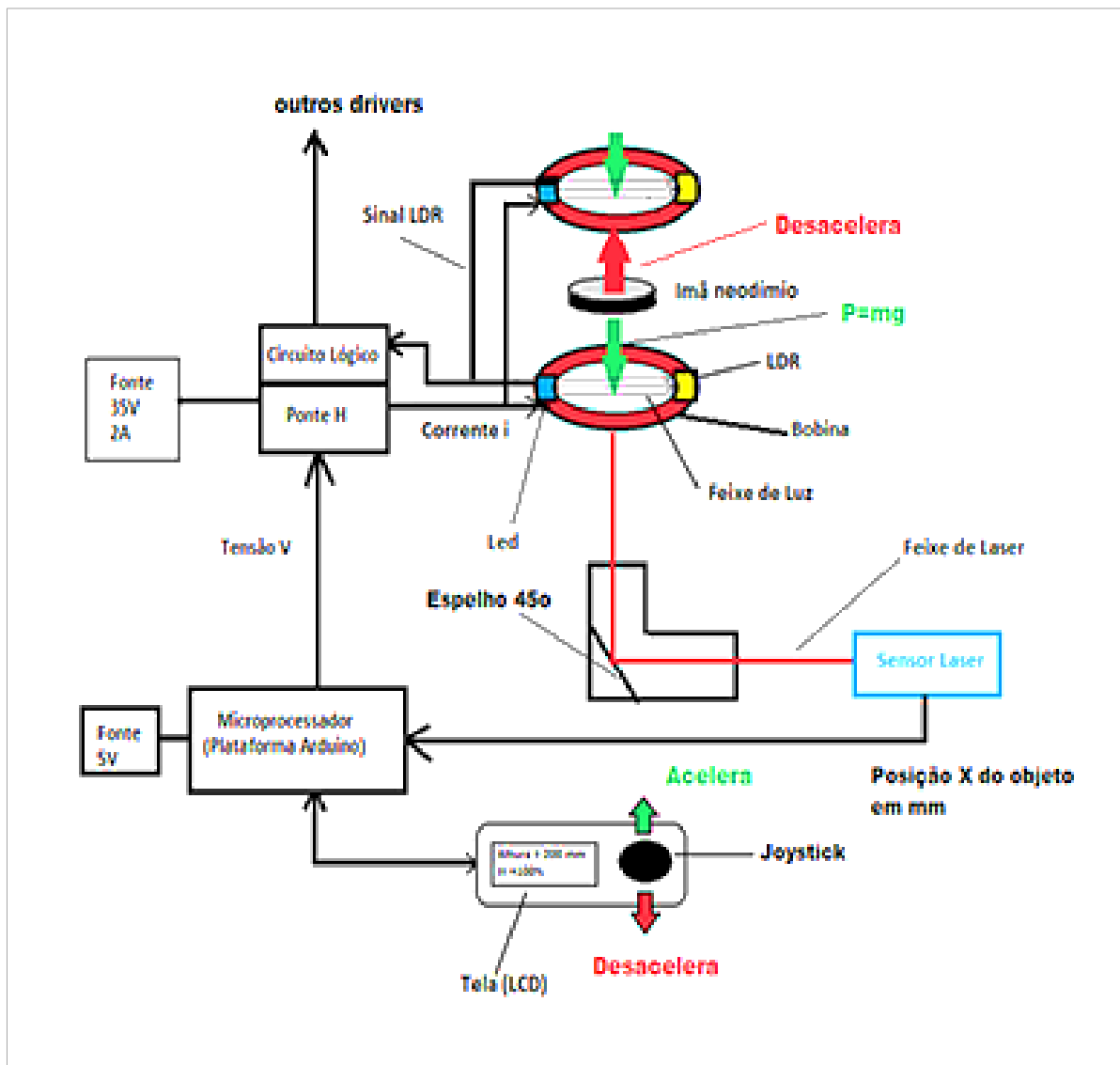
Fonte: DORF; BISHOP, 2013.

Figura 8 - Diagrama de blocos do protótipo



Fonte: Elaborado pelos autores.

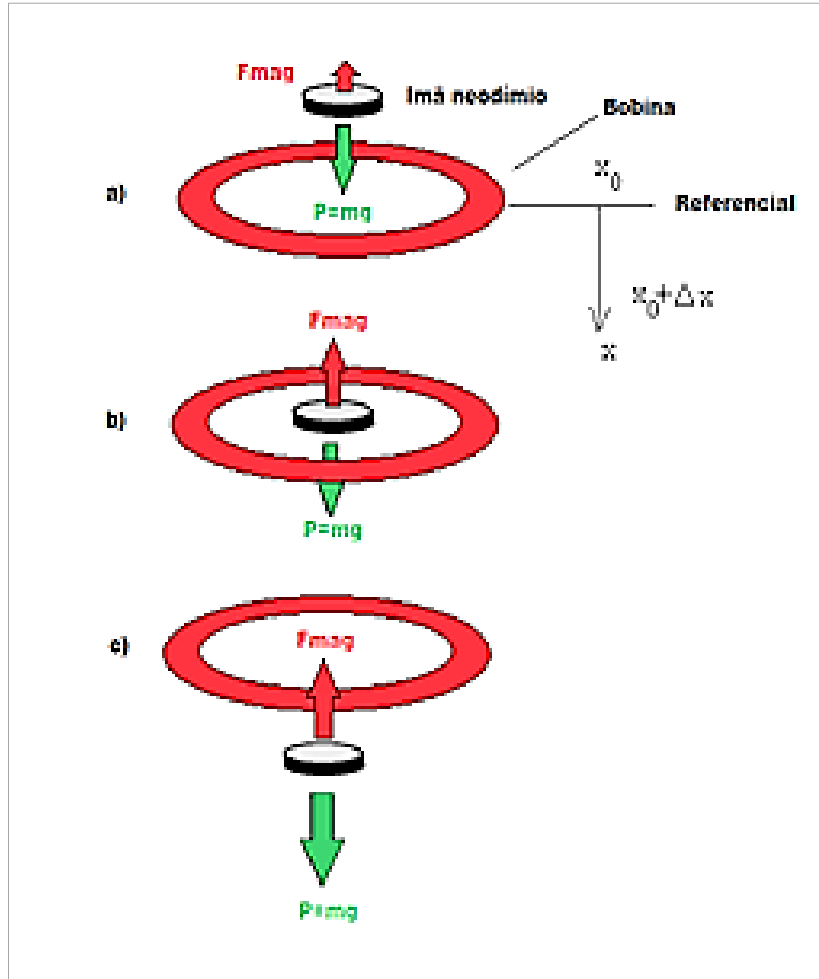
Figura 9 - Diagrama esquemático do protótipo



Fonte: Elaborado pelos autores.

## 2.12 Modelo dinâmico do protótipo

Figura 10 - Referencial adotado para o sistema eletromecânico



Fonte: Elaborado pelos autores.

O modelo adotado é do tipo *SLIT*, ou seja, um sistema linear invariante no tempo (DORF; BISHOP, 2013). Em  $x_0$  o somatório das forças será zero. Supondo um pequeno deslocamento do objeto,  $\Delta x$ , em relação a sua posição inicial,  $x_0$ , como apresentado na figura 10, pode-se descrever a equação da força resultante conforme equações (21) e (26):

$$F_r = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = m \cdot \ddot{x} = mg - F_{mag} \quad (38)$$

Onde:

$m$  é a massa do objeto ferromagnético.

$g$  é a aceleração da gravidade.

$F_{mag}$  é a força magnética produzida pela bobina.

Na figura 10, cada letra significa uma posição do ímã em relação ao tempo, sendo que a letra a) seria antes da entrada no alinhamento da bobina. A letra b) o ímã dentro do alinhamento da bobina. A letra c) o ímã já saindo do alinhamento da bobina. Em todas as posições, a força magnética está representada no mesmo sentido da aceleração da gravidade.

Na equação (26) foi demonstrado que a força magnética é dependente da corrente e da distância (*gap*). No caso do objeto ferromagnético, não é possível obter uma expressão analítica para a força devido à geometria complexa, porém aplicando a expansão em série de Taylor (DORF & BISHOP, 2013, p. 41), como apresentada na equação (39), para o ponto de equilíbrio  $(x_0, i_0)$ , tem-se que:

$$F_{mag} = (x_0 + \Delta x, i_0 + \Delta i) F_{mag}(x_0, i_0) + \Delta x \frac{\partial F_{mag}}{\partial x}(x_0, i_0) + \Delta i \frac{\partial F_{mag}}{\partial i}(x_0, i_0) \quad (39)$$

Nota-se que de acordo com o referencial adotado, para um  $\Delta x \uparrow$  (crescente) a  $F_{mag} \downarrow$  (decrecente) e para um  $\Delta i \uparrow$  (crescente) a  $F_{mag} \uparrow$  (crescente), podemos concluir que:

$$F_{mag}(x_0, i_0) = mg, \quad \frac{\partial F_{mag}}{\partial x}(x_0, i_0) = -k_x, \quad \frac{\partial F_{mag}}{\partial i}(x_0, i_0) = k_i, \quad (40)$$

e de forma simplificada reescrever a equação:

$$F_{mag} = mg - k_x \Delta x + k_i \Delta i \quad (41)$$

Por definição  $\Delta x = x - x_0$ , então  $\Delta \ddot{x} = \ddot{x} = \frac{dx}{dt^2}$ . A partir deste ponto,  $\Delta x$  e  $\Delta i$  serão denominados simplesmente  $x$  e  $i$ . A equação (39) representa a dinâmica do sistema eletromecânico.

$$m\ddot{x} - k_x x = -k_i i \quad (42)$$

Aplicando a transformada de Laplace (DORF; BISHOP, 2013), à equação acima, tem-se:

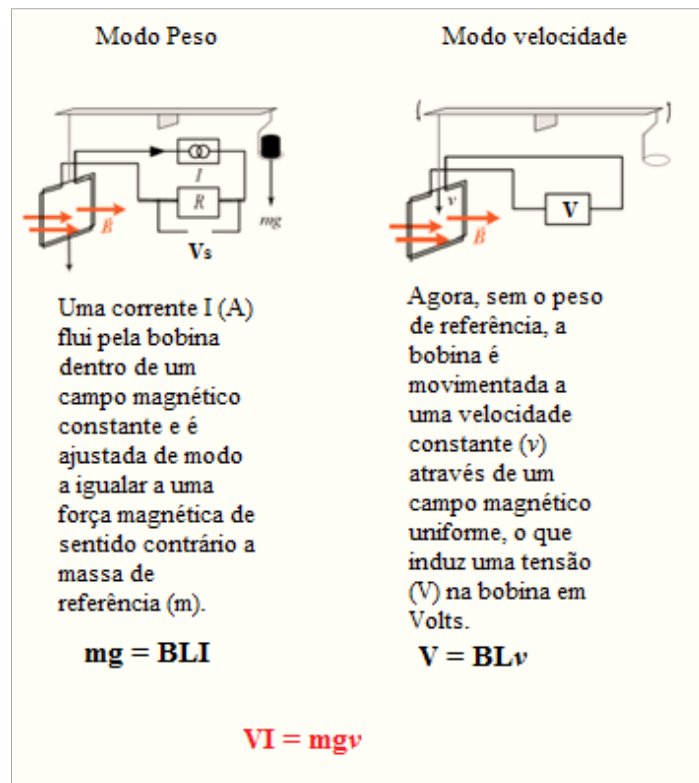
$$G(S) = \frac{X(S)}{I(S)} = \frac{-K_i}{ms^2 - k_x} \quad (43)$$

Os polos equação de segunda ordem do denominador da equação (41) são imaginários, devido a:  $\frac{-K_x}{m} < 0$ .





**Figura 12 Como os modos peso e velocidade funcionam?**



Fonte: SUTTON, FUNG, 2018.

### 2.13.1 Modo de peso - corrente

No modo “peso” ou “força”, uma massa de teste ( $m$ ) é colocada em um pequeno prato que está ligado mecanicamente à uma bobina de comprimento  $L$ , abaixo deste prato, ou seja, ambas terão a mesma velocidade de deslocamento quando movimentadas. A massa de teste exerce uma força descendente, seu peso ( $p = m \cdot g$ ), que é igual à sua massa ( $m$ ) vezes o campo gravitacional local ( $g$ ) medido por um gravímetro absoluto (SUTTON, FUNG, 2018).

Uma corrente ( $I$ ) é aplicada à bobina ( $B \cdot L$ ) é então ajustada até que a força ascendente ( $F$ ) na bobina equilibre com precisão a força descendente do peso ( $p$ ). Quando o sistema atinge o equilíbrio, a corrente é registrada (SUTTON, FUNG, 2018).

Temos então a força ( $F$ ) produzida pela bobina sendo igual ao peso da massa ( $m$ ), pode ser calculada com uma simples equação:  $F = I \cdot \vec{B} \cdot L$ , equação (12). Mas potência é  $P = V \cdot I$ , e só temos registrada a corrente  $I$  (A). Conhecer o valor de  $V$  (V) é necessário. Entretanto, o produto  $\vec{B} \cdot L$  é analiticamente difícil de se ter com a precisão necessária, envolve usarmos uma constante de aproximação (SUTTON, FUNG, 2018).

Usando uma segunda equação, da lei de Faraday, equação (3) e ao a igualarmos a equação (12), será desnecessária a participação desta constante. Esta pode ser matematicamente eliminada por multiplicar ambos os lados das equações (SUTTON, FUNG, 2018).

### 2.13.2 Modo Velocidade – tensão

Neste segundo passo, modo velocidade ou calibração, a corrente na bobina é desligada e a massa de teste removida. Segundo a lei de Faraday, o movimento de bobina num campo magnético uniforme irá gerar força contra eletromotriz na bobina. A velocidade, no entanto, deverá ser controlada e seu valor conhecido com precisão, a tensão da bobina é registrada. (SUTTON, FUNG, 2018).

A equação (3), a lei de Faraday, é novamente invocada, temos a equação (4), onde “ $\vec{B}$ ” e “ $L$ ” são a força do vetor de campo magnético (figura 12), o comprimento do fio respectivamente, e “ $v$ ” é a velocidade de movimentação da bobina. Isolando-se  $\vec{B} \cdot L$  nas equações (4) e (12), e igualando as “constantes”  $\vec{B} \cdot L$ :

$$\text{Da equação (4) temos (modo velocidade): } \frac{V}{v} = \vec{B} \cdot L. \quad (46)$$

$$\text{Da equação (12) temos (modo força): } \frac{F}{I} = \vec{B} \cdot L. \quad (47)$$

$$\frac{V}{v} = \frac{F}{I}.$$

$$V \cdot I = F \cdot v. \quad (48)$$

$$V \cdot I = m \cdot g \cdot v \quad [W] = \left[ \frac{J}{s} \right] \quad (49)$$

Ou de outra forma:

$$m = \frac{I \cdot v}{g} \quad (50)$$

A velocidade do movimento da bobina é feita com interferometria a laser. A constante de Plank entra nas equações na maneira como a corrente e a tensão são medidas. Usam-se duas constantes físicas diferentes (SUTTON, FUNG, 2018).

A primeira, a corrente em uma balança Kibble é medida por meio de um resistor no circuito (shunt), a **constante de von Klitzing** (figura 12), que descreve como a resistência é quantizada (SUTTON, FUNG, 2018).

A segunda, a tensão é medida usando o **efeito Josephson** (figura 12), e sua constante de mesmo nome, que relaciona tensão e frequência em um circuito supercondutor, com incertezas de medição na faixa de 1 parte em 10 bilhões (SUTTON, FUNG, 2018).

Ambas as constantes são definidas em termos da constante de Planck,  $h$ , e da carga do elétron,  $e$ . Essas são quantidades muito pequenas. No entanto, ambas se manifestam em fenômenos macroscópicos mensuráveis (SUTTON, FUNG, 2018).

Devido a essas conexões com a constante de Planck, a balança de Kibble pode medir  $h$  quando a massa é exatamente conhecida (como no caso de um padrão de 1 kg), ou pode medir uma massa desconhecida se  $h$  for conhecido (SUTTON, FUNG, 2018).

## 2.14 Descrição do funcionamento deste protótipo

Para o modelo simplificado da balança de Kibble, ao invés de um prato com uma bobina em seu interior ligado a uma massa de teste ( $m$ ), foi escolhido um ímã de neodímio com massa conhecida (Kg). Este protótipo usa um ímã de neodímio como massa de teste. Assim o efeito do campo magnético das bobinas verticais no ímã é amplificado. Quanto mais próximo o ímã das bobinas, mais intensa será a força ( $|F| \approx I/d^2$ ).

Em um primeiro modo de operar, o ímã é solto no centro da bobina. O operador move o *joystick*, controlando assim a direção e intensidade da corrente na bobina. Esta irá gerar um campo magnético. Esse modo é chamado de malha aberta. O operador ajusta a posição do *joystick* de modo a acelerar, desacelerar ou estacionar a massa de teste que cai na vertical.

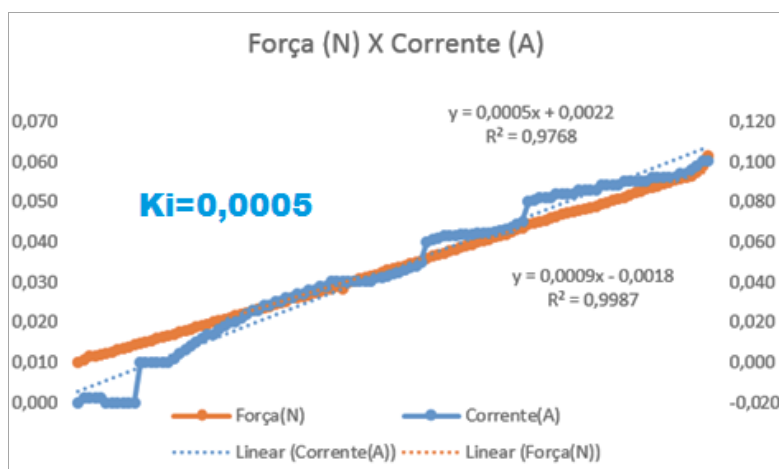
Em um segundo modo de operação, usa-se uma malha fechada, com realimentação negativa, com controle PID, de proporcional, integral, derivativo, (DORF; BISHOP, 2013), fazendo que o sistema mantenha o objeto estacionado a uma distância conhecida a partir do pondo de entrada na bobina. Em ambos os casos, a medição de corrente na bobina poderá ser feita.

Quando a massa de teste é solta fora do campo magnético, esta é acelerada pela força da gravidade. Seu peso é constante e sua velocidade crescente com o tempo. Ao entrar no campo magnético da bobina a massa de teste é instantaneamente freada por uma força que surge na direção e sentido contrário à sua queda, análogo a terceira lei de Newton. Esta força é gerada pela corrente de Foulcault induzida no metal da massa de teste pela lei de Faraday, além da própria força magnética entre o ímã e a bobina.

A diminuição da velocidade também será a uma taxa proporcional à velocidade da entrada da massa de teste no campo magnético e sentido contrário, até que velocidade fique constante e conhecida, e deve medida pelo sistema de controle (PID). Este último requisito, a velocidade constante e conhecida, é a principal questão a ser mantida pelo sistema pelo protótipo. Com a equação (50), conhecendo-se o valor de  $g$  e  $V$  chega-se ao valor da massa de teste ( $m$ ).

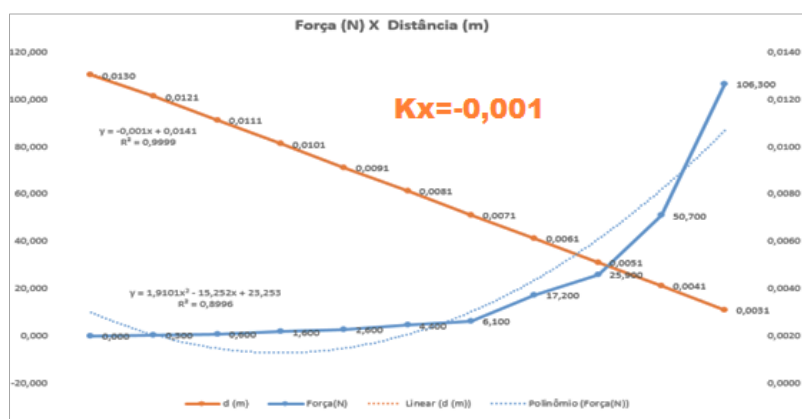
### 3 RESULTADOS

**Figura 13 - Gráfico Força (N) x Corrente (A)**



Fonte: Elaborada pelos autores.

**Figura 14 - Gráfico Força (N) x Distância (m)**



Fonte: Elaborada pelos autores.

$m = 0,1036$  Kg (massa do ímã duplo de neodímio).

$K_i = 0,0005$  (conforme inclinação do gráfico da corrente na figura 10).

$K_x = -0,001$  (conforme inclinação do gráfico da distância na figura 11).

$$G(S) = \frac{X(S)}{I(S)} = \frac{-K_i}{ms^2 - k_x} \quad (51)$$

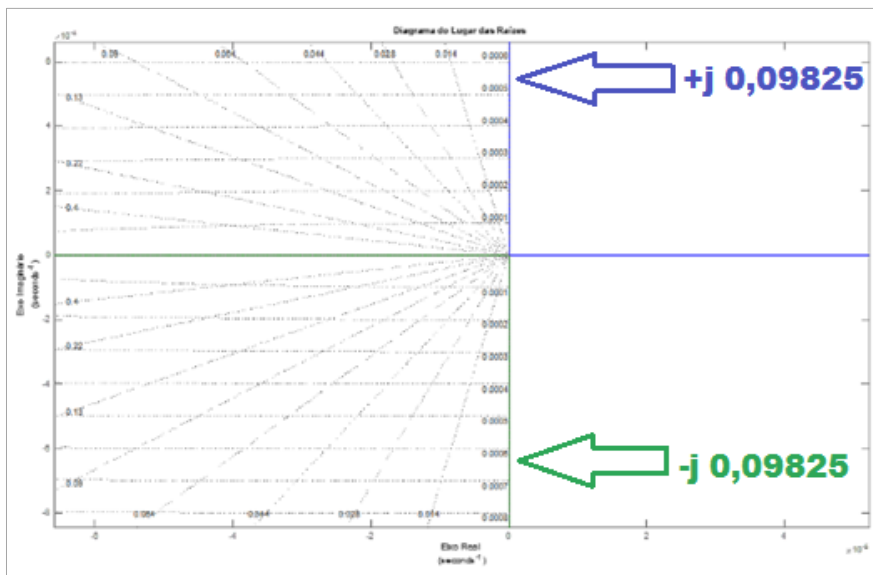
$$G(S) = \frac{X(S)}{I(S)} = \frac{-0,0005}{0,1036s^2 + 0,001} \quad (52)$$

Os polos da função G(S) são reais.

$$S = \pm \sqrt{\frac{K_x}{m}} \quad (53)$$

$$S = \pm \sqrt{\frac{-0,001}{0,1036}} = \pm \sqrt{-0,00965} = \pm j0,09825 \quad (54)$$

**Figura 15 - Diagrama dos Locais das Raízes (DLR) da função de transferência G(s).**



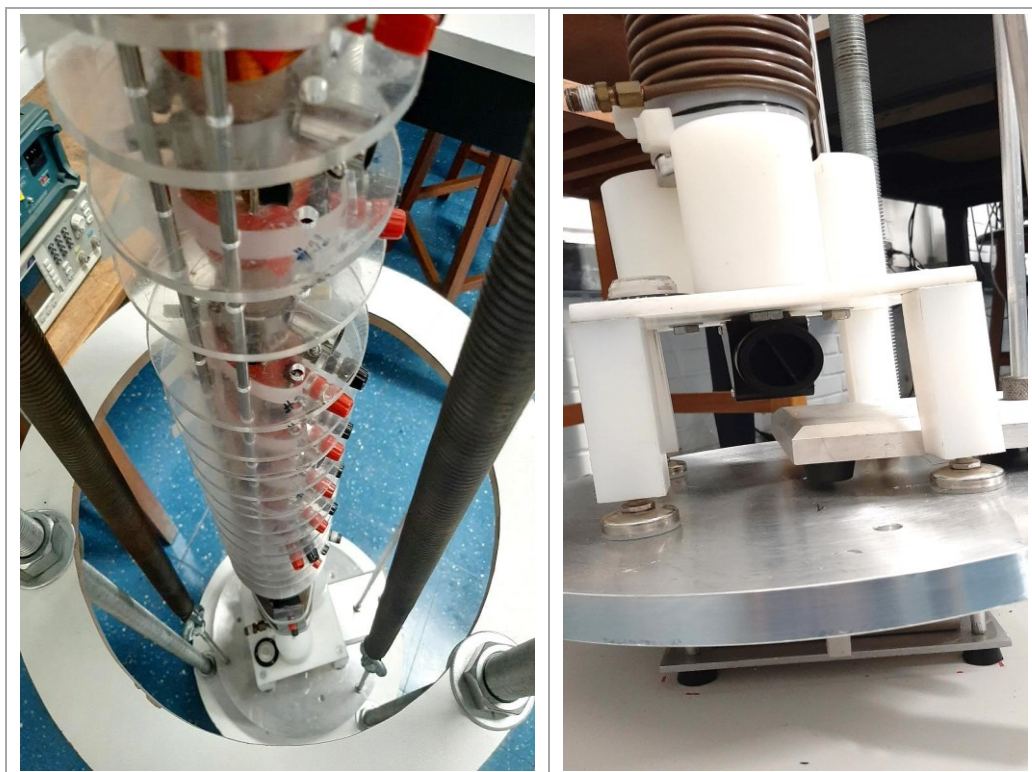
Fonte: Elaborado pelos autores em *MATLAB*®.

Os valores das constantes encontradas ( $K_i$  e  $K_x$ ) estavam dentro do esperado conforme a análise dos gráficos plotados e suas medições, inclinação das respectivas retas.

A equação G(s) é a função de transferência em malha aberta para o modelo físico do processo da planta, uma bobina. A função de transferência não tem zeros, somente dois polos conjugados complexos, um em  $+j 0,09825$  (eixo Y positivo) e outro em  $-j 0,09825$  (eixo Y negativo), figura 15. A curva da função de transferência é uma senóide de amplitude igual a 0,0982. Esta é a frequência natural do sistema em *rad/s*.

Pressupondo o sistema ideal ( $\alpha=0$ ), a planta do sistema tem uma função de transferência de frequência natural não amortecida, pois não existe parte real nas raízes de seus polos. Caso existisse a parte real, a partir do tempo inicial, um amortecimento reduziria a frequência de oscilação do sistema, sendo que este é marginalmente estável por estar exatamente em cima do eixo Y. Isso pode sugerir a inserção de um zero à esquerda do eixo Y para mantê-lo estável. Isso ainda faz ajustar um tempo de acomodação desejado mediante escolha da localização deste zero. A esse ajuste damos um nome de introdução de um compensador (NISE, NORMAN S., 2003).

**Figura 16 – Protótipos construídos**



Fonte: Acervo dos autores, 2019.

Acreditamos que os passos feitos detalhadamente neste artigo poderão ser de grande interesse acadêmico. Embora não realizado em disciplina ou Prática Curricular de Extensão, o protótipo construído, que se encontra no Laboratório de Eletromagnetismo do Instituto Politécnico (IPUC) da PUC Minas *campus* Coração Eucarístico oferece inúmeras oportunidades de utilização por professores e alunos da educação básica (Fundamental II ou Ensino Médio)<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Durante a construção do protótipo, o autor Haroldo Kennedy produziu e utilizou material sobre os tópicos envolvidos, da Física, e levou partes desse trabalho, em unidades didáticas, para aulas de um colégio de Ensino Médio de Belo Horizonte, e aplicou-o na turma da filha, que estava no 3º ano, preparando-se para o Enem.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste foi explicar o cálculo da constante de linearização de uma bobina e os princípios básicos de funcionamento da balança de Kibble, em que, para efeito de precisão, esta constante pode ser desprezada através do uso de duas medições e suas equações. O uso do ímã de neodímio, ao invés de um material ferromagnético, contribuiu para diminuir a potência dos acionadores (drivers) das bobinas, e foi uma escolha mais simples de operar e que produziu o mesmo efeito que o outro. A velocidade do ímã se torna constante à medida que vai na direção do centro do tarugo, e pode ser medida facilmente com um sensor laser de alta frequência de amostragem (pelo menos 1.000 Hz).

Será necessário incorporar a este trabalho o modelo em malha fechada para efetivo controle do processo, fazer com que a velocidade fique constante para o cálculo da massa ( $m$ ).

Assim conhecendo-se a velocidade, a força e a aceleração da gravidade ( $g$ ), consegue-se medir a massa do objeto equação (50).

O protótipo construído e instalado no Laboratório de Eletromagnetismo do IPUC, disponível à comunidade acadêmica, mostrou-se relevante também na realização de experimentos em sala de aula da Educação Básica (Ensino Médio), que funcionou como “piloto” para verificação da potencialidade das descobertas aqui evidenciadas.

#### REFERÊNCIAS

- BLANCO, Rosa Leamar Dias; THOMAS, Carlos Alberto Kern; ZARO, Milton Antônio. Medição da fora produzida pelo solenoide sobre o núcleo móvel em bobinas usadas nos sistemas de partida. **Revista de Ensino de Física**, Rio de Janeiro, p. 88-106.1998.
- BUREAU INTERNACIONAL DES POIDS ET MESURES. **About the BIPM**. Cèvres, France: BIPM, 2019. Disponível em: < <http://www.bipm.org> >. Acesso em: 21 dez. 2019.
- CATTANI, M.; VANNUCCI, A. Correntes de Foucault: aspectos básicos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 36, n. 2, p. 1-8, 2014.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. Trad. J. P. Matssura. 12 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- HAYT, W. H.; BUCK, J. A. **Eletromagnetismo**: vol. I. Porto Alegre: MC Graw Hill, 2013.
- LENZ, Heinrich Friedrich Emil. *In*: NATIONAL HIGH MAGNETIC FIELD LABORATORY. Magnet Academy. Tallahassee, FL, USA: National MagLab, 2019. Disponível em: < <https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/history-of-electricity-magnetism/pioneers/heinrich-friedrich-emil-lenz> >. Acesso: 21 fev. 2020.



- MICHAEL Faraday (1791-1867). Biography of Michael Faraday. *In: THE ROYAL INSTITUTION. Science Lives Here*. London: The Royal Institution of Great Britain, 2019. Disponível em: < <https://www.rigb.org/our-history/people/f/michael-faraday> >. Acesso em: 10 out. 2019.
- MILTON, Martin. **On the proposed re-definition of the SI**, BIPM, 2016: Disponível em: < <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/talks/Milton-MJT-2016-06-Varenna-Redefinition-SI.pdf> >. Acesso em: 27 fev. 2020.
- NEUMANN, Franz Ernst. *In: ENCYCLOPEDIA.COM*. Oxford: Oxford University Press, 2019. Disponível em: < [www.encyclopedia.com](http://www.encyclopedia.com): <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/neumann-franz-ernst> >. Acesso em: 21 fev. 2020.
- NATIONAL PHYSICAL LABORATORY. **SI units**: kilogram (kg). Middlesex, TX: NPL, 2019. Disponível em: < <https://www.npl.co.uk>: <https://www.npl.co.uk/si-units/kilogram> >. Acesso em: 21 fev. 2020.
- NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY, NIST. [www.nist.gov](http://www.nist.gov). Gaithersburg, MD, USA. Disponível em: < <https://www.nist.gov/si-redefinition/kilogram/kilogram-kibble-balance> >. Acesso em: 21 fev. 2020.
- NISE, Norman. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- PERLINGEIRO, P. J. Desmagnetização Adiabática. **Revista Ciência Hoje**, edição 155, p. 35-39. SBPC, Rio de Janeiro, RJ, 1999.
- PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS. **Orientações para elaboração artigo científico**: NBR:6022:2028: Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Belo Horizonte: PUC-MG, 2019. Disponível em: < <https://portal.pucminas.br/documentos/artigo-cientifico-NBR6022-2018.pdf> >. Acesso em: 21 fev. 2020.
- SUTTON, Chris, FUNG, Yin Hsien. **The MSL kibble balance, what is it for?**. New Zealand: The Measurement Standards Laboratory, 2018. Disponível em: < <https://measurement.govt.nz/news-and-events/chris-sutton-retires/> >. Acesso em: 01 mar. 2020.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**: eletricidade e magnetismo, óptica. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

## APÊNDICE

### Agradecimentos do autor Haroldo Kennedy Clebicar Nogueira

Agradeço aos alunos da minha turma de semestres anteriores, que ao deixá-los exercitar a imaginação no tarugo de cobre recém-adquirido, colocaram o ímã de neodímio a um metro acima da entrada do mesmo e o soltaram. O ímã caiu velozmente no orifício e quase que parando instantaneamente. Ao vê-los literalmente brincando com aquelas peças, pude notar toda a beleza daquele efeito físico e o como é importante aprender com os outros! Agradeço a toda equipe da biblioteca da PUC MINAS, em especial a formidável pessoa da Fabiana, que revisou este artigo; a todos meus colegas de trabalho a quem enviei uma cópia e aos empregados do Cine Belas Artes - minha terceira casa por todos esses anos; ao colega analista de sistemas Richardson de Almeida Moraes; ao colega Francisco José Magalhães que, além de ótimo engenheiro mecânico, é um apreciador da língua portuguesa e do vernáculo, coisa rara na nossa área, por importantes sugestões na maneira de se escrever este artigo; ao colega engenheiro químico, Costabile De Sessa, pela ajuda na revisão; também ao engenheiro eletricitista e colega de trabalho Euler Henrique Teixeira, pela ajuda em tornar o projeto da fiação mais funcional possível, sugestões em eletrônica básica e o uso do *Flitzing*; ao ex-colega, engenheiro

eletricista e físico, Álvaro Paulino sobre as orientações para interpretação das equações físicas aqui presentes; ao funcionário da PUC MINAS, coordenador da oficina de apoio dos alunos, Lindomar; aos professores da cadeira de Eletromagnetismo que gentilmente cederam um espaço no laboratório para que se instalasse o protótipo: Rose Batalha e Luciano, ex-colega de trabalho; aos professores que também tiveram enorme paciência e dedicação em ajudar-me a aprender nos semestres anteriores (muitos), e em especial os professores deste semestre: Knegt e Diogo Henrique de Souza Chaves; ao mestre “seu” João Noronha (um “Michel Ângelo” na arte do acrílico); ao mestre torneiro mecânico Marcos Pinto Coelho, sem cuja capacidade de compreensão dos meus desenhos nada disso seria possível; por fim, agradeço a minha filha querida, Maria Eduarda, que também me ajudou a melhorar os textos de introdução e resumos.